

Energie potentielle, énergie mécanique et résonance

Au chapitre 6, on a défini l'énergie cinétique d'un point matériel. Dans la première section, on va montrer qu'on peut définir des énergies potentielles liées aux forces conservatives. La somme des énergies cinétique et potentielles constitue l'énergie mécanique. On va établir le théorème de conservation de l'énergie mécanique en absence de forces dissipative et on va déterminer la puissance dissipée par les forces dissipatives. Dans la deuxième section, on va discuter la notion de stabilité d'une position d'équilibre. Au chapitre 4, on a étudié la dynamique d'un oscillateur harmonique libre et d'un oscillateur harmonique amorti. Dans la troisième section de ce chapitre, on va examiner la dynamique d'un oscillateur harmonique forcé couplé à une force extérieure périodique. On verra que l'amplitude du mouvement dépend de manière critique de la fréquence d'oscillation. Ce comportement est à l'origine du phénomène de résonance.

7.1 Energie potentielle et énergie mécanique

Au chapitre 6, on a défini le travail $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F})$ effectué par une force \mathbf{F} sur un point matériel d'une position initiale \mathbf{r}_1 à une position finale \mathbf{r}_2 comme l'intégrale du produit de la force \mathbf{F} et du déplacement $d\mathbf{r}$ le long de la trajectoire du point matériel. Cette intégrale curviligne (6.55) dépend en général du chemin suivi. Cependant, il existe des forces appelées *forces conservatives* – terme qui sera justifié ultérieurement – pour lesquelles l'intégrale est indépendante du chemin suivi. Elle dépend uniquement de la position initiale \mathbf{r}_1 et de la position finale \mathbf{r}_2 . Le travail effectué par une force conservative \mathbf{F}_c sur un point matériel d'une position initiale \mathbf{r}_1 à une position finale \mathbf{r}_2 s'écrit donc,

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \int_{\mathcal{C}_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (7.1)$$

Cette intégrale peut être écrite comme la somme de deux intégrales dont les bornes dépendent d'une position de référence arbitraire \mathbf{r}_0 ,

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \quad (7.2)$$

Afin d'exprimer le travail (7.2) de la force conservative $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c)$ en termes d'une variation d'énergie de la position initiale \mathbf{r}_1 à la position finale \mathbf{r}_2 , on le met sous la forme suivante,

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right) - \left(- \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \right) \quad (7.3)$$

7.1.1 Energie potentielle

A présent, on peut définir l'*énergie potentielle* associée à une force extérieure conservative $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$. Cette énergie potentielle est une grandeur scalaire et extensive $V(\mathbf{r})$ définie comme le travail à effectuer en s'opposant à la force conservative \mathbf{F}_c pour déplacer le point matériel de la position arbitraire de référence \mathbf{r}_0 à la position \mathbf{r} ,

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.4)$$

Elle est définie à une constante près, comme l'énergie cinétique, en raison du choix arbitraire de la position de référence \mathbf{r}_0 que l'on peut choisir judicieusement. Compte tenu de la définition (7.4) de l'énergie potentielle, on peut maintenant exprimer le travail (7.3) de la force conservative \mathbf{F}_c comme l'opposé de la variation d'énergie potentielle,

$$W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c) = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2) \equiv V_1 - V_2 = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} \quad (7.5)$$

L'unité de l'énergie potentielle dans le système international d'unités est le Joule noté [J] = [kg m² s⁻²]. Il s'agit bien entendu de la même unité que le travail et l'énergie cinétique. Le travail (7.1) effectué par la force conservative \mathbf{F}_c lors d'un déplacement le long du chemin fermé \mathcal{C} qui va de la position initiale \mathbf{r}_1 à la position finale $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$,

$$W_{\mathcal{C}}(\mathbf{F}_c) = \oint \delta W(\mathbf{F}_c) = \oint \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (7.6)$$

Ce résultat nous amène à énoncer le théorème d'existence de l'énergie potentielle :

Théorème 7.1 *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une énergie potentielle $V(\mathbf{r})$ associée à une force \mathbf{F} , c'est-à-dire pour que la force \mathbf{F} soit conservative, est que le travail effectué par la force extérieure $W_{\mathcal{C}}(\mathbf{F})$ sur tout chemin fermé \mathcal{C} soit nul,*

$$W_{\mathcal{C}}(\mathbf{F}) = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{ainsi} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_c \quad (7.7)$$

Historiquement, c'est William John Macquorn Rankine qui a introduit la notion extrêmement utile d'énergie potentielle.



William John
Macquorn Rankine

7.1.2 Energie mécanique

L'énergie potentielle totale V est la somme des énergies potentielles associées aux forces extérieures conservatives $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$,

$$V = \sum V(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) \quad \text{où} \quad V(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.8)$$

L'*énergie mécanique* E est une grandeur scalaire et extensive qui est la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle totale V associée à toutes les forces extérieures conservatives,

$$E = T + V \quad (7.9)$$

L'unité de l'énergie dans le système international d'unités est le Joule noté [J] = [kg m² s⁻²]. Il s'agit bien entendu de la même unité que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. La somme des travaux (7.5) effectués par les forces extérieures conservatives lors d'un déplacement d'une position initiale \mathbf{r}_1 à une position finale \mathbf{r}_2 s'écrit,

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (7.10)$$

En identifiant les expressions (6.58) et (7.5) des travaux $W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c)$ de l'ensemble des forces conservatives, on obtient l'identité,

$$T_2 - T_1 = - (V_2 - V_1) \quad \text{ainsi} \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (7.11)$$

L'énergie mécanique E_1 en position initiale \mathbf{r}_1 et l'énergie mécanique E_2 en position finale \mathbf{r}_2 s'écrivent,

$$E_1 = T_1 + V_1 \quad \text{et} \quad E_2 = T_2 + V_2 \quad (7.12)$$

A présent, on est en mesure d'énoncer le théorème conservation de l'énergie :

Théorème 7.2 *Si toutes les forces extérieures agissant sur un point matériel sont des forces conservatives $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}$, alors l'énergie mécanique E est conservée, ce qui implique que l'énergie mécanique E_1 au temps t_1 est égale à l'énergie mécanique E_2 au temps t_2 et que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique \dot{E} est nulle,*

$$E_1 = E_2 = \text{cste} \quad \forall t_1, t_2 \quad \text{ainsi} \quad \dot{E} = 0 \quad (7.13)$$

7.1.3 Energie et puissance dissipées

On considère un point matériel de masse m sur lequel s'applique des forces extérieures conservatives $\mathbf{F}_c^{\text{ext}}(t)$ et des force extérieures dissipatives $\mathbf{F}_d^{\text{ext}}(t)$. La somme des forces extérieures s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum \mathbf{F}_c^{\text{ext}} + \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \quad (7.14)$$

La somme des travaux effectués par les forces extérieures lors du déplacement du point matériel de la position initiale \mathbf{r}_1 à la position finale \mathbf{r}_2 peut se décomposer de la même manière,

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}^{\text{ext}}) = \sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) + \sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) \quad (7.15)$$

Compte tenu de la variation de l'énergie cinétique, donnée par le théorème de l'énergie cinétique (6.58), et de la variation de l'énergie potentielle (7.10), la somme des travaux effectués par les forces extérieures (7.15) devient,

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} + \sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) \quad (7.16)$$

qui est remis en forme comme,

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta V_{1 \rightarrow 2} \quad (7.17)$$

Compte tenu des énergies mécaniques (7.12), la variation d'énergie mécanique est la somme des variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle totale,

$$\Delta E_{1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1 = T_2 + V_2 - T_1 - V_1 = \Delta T_{1 \rightarrow 2} + \Delta V_{1 \rightarrow 2} \quad (7.18)$$

A présent, on est en mesure d'énoncer le théorème de l'énergie mécanique :

Théorème 7.3 *La somme des travaux effectués par des forces dissipatives d'une position initiale \mathbf{r}_1 à une position finale \mathbf{r}_2 est égale à la variation d'énergie mécanique,*

$$\sum W_{1 \rightarrow 2}(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \Delta E_{1 \rightarrow 2} \quad (7.19)$$

Ainsi, on voit clairement que l'énergie mécanique E est dissipée uniquement par les forces extérieures dissipatives $\mathbf{F}_d^{\text{ext}}$. La formulation infinitésimale du théorème de l'énergie mécanique est,

$$dE = \sum \delta W(\mathbf{F}_d^{\text{ext}}) = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.20)$$

La puissance mécanique (6.61) dissipée par une force dissipative $\mathbf{F}_d^{\text{ext}}$ s'écrit,

$$P = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \sum \mathbf{F}_d^{\text{ext}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (7.21)$$

Compte tenu de la variation infinitésimale d'énergie mécanique (7.20), la puissance mécanique dissipée (7.21) est la dérivée temporelle de l'énergie mécanique,

$$P = \frac{dE}{dt} = \dot{E} \quad (7.22)$$

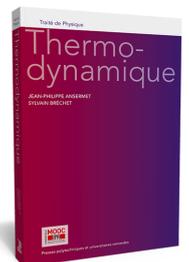
A titre d'exemple, on peut considérer la puissance mécanique dissipée par une force de frottement visqueux $\mathbf{F}_f = -b\mathbf{v}$ où $b > 0$ en régime laminaire. D'après l'équation (7.21), la puissance mécanique dissipée s'écrit alors,

$$P = \mathbf{F}_f \cdot \mathbf{v} = -b\mathbf{v}^2 < 0 \quad (7.23)$$

La puissance mécanique dissipée est négative ce qui signifie que le point matériel perd de l'énergie mécanique. Or, Antoine Laurent de Lavoisier a très justement affirmé : "Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme". En réalité, l'énergie mécanique dissipée par la force de frottement se transforme en une autre forme d'énergie appelée la *chaleur* qui est étudiée dans le cadre de *thermodynamique*, qui est une extension de la mécanique permettant d'inclure toutes sortes d'autres formes d'énergie.



Antoine Laurent de Lavoisier



Thermodynamique (parties 1, 2)

7.1.4 Force conservative

On désire à présent exprimer une force conservative \mathbf{F}_c en terme du potentiel V associé à cette force. Pour ce faire, on calcule le travail infinitésimal effectué par la force conservative \mathbf{F}_c lors d'un déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}$ d'une position initiale \mathbf{r} à une position finale $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$. Dans un repère cartésien, le vecteur position et le vecteur déplacement s'écrivent,

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad \text{ainsi} \quad d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 dx_i \hat{\mathbf{x}}_i \quad (7.24)$$

Le travail infinitésimal (6.54) de la force conservative \mathbf{F}_c s'exprime comme,

$$\delta W (\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = \mathbf{F}_c^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r} = -dV(\mathbf{r}) = -\left(V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})\right) \quad (7.25)$$

La variation infinitésimale de l'énergie potentielle $V(\mathbf{r}) = V(x_1, x_2, x_3)$ est la somme des variations de obtenues en faisant varier chaque coordonnée et en maintenant les autres constantes,

$$dV(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{V(\mathbf{r} + dx_i \hat{\mathbf{x}}_i) - V(\mathbf{r})}{dx_i} \right) dx_i \quad (7.26)$$

où la dérivée partielle de l'énergie potentielle $V(x_1, x_2, x_3)$ par rapport à une seule coordonnée x_i est définie comme,

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{V(\mathbf{r} + dx_i \hat{\mathbf{x}}_i) - V(\mathbf{r})}{dx_i} \quad (7.27)$$

Dans la pratique, on la calcule en maintenant constantes les autres coordonnées de position cartésienne dans l'expression de l'énergie potentielle V . Compte tenu de la variation infinitésimale de la coordonnée $dx_i = \hat{\mathbf{x}}_i \cdot d\mathbf{r}$, de la variation infinitésimale de l'énergie potentielle (7.26) et de la dérivée partielle (7.27), le travail infinitésimal (7.25) devient,

$$\delta W (\mathbf{F}_c^{\text{ext}}) = -dV(\mathbf{r}) = -\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{\mathbf{x}}_i \right) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.28)$$

L'opérateur vectoriel **gradient** est la dérivée vectorielle par rapport à la position qui s'écrit dans le repère cartésien comme,

$$\nabla = \frac{d}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{x}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \hat{\mathbf{x}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{x}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (7.29)$$

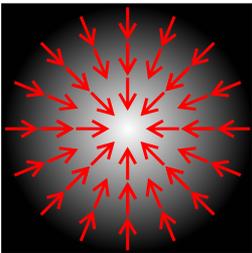
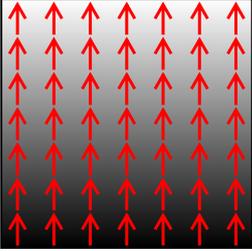
Ainsi, le **gradient de potentiel** ∇V est un vecteur dont les coordonnées cartésiennes sont obtenues en prenant la dérivée partielle du potentiel V par rapport aux coordonnées correspondantes,

$$\nabla V \equiv \frac{dV}{d\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{\mathbf{x}}_i = \frac{\partial V}{\partial x_1} \hat{\mathbf{x}}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \hat{\mathbf{x}}_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \hat{\mathbf{x}}_3 \quad (7.30)$$

Le gradient de potentiel est orienté dans la direction de la plus grande variation du potentiel et sa norme correspond à la valeur de la pente. Les courbes de potentiel constant s'appellent des **équipotentiels**. En chaque point d'une équipotentielle, le vecteur gradient de potentiel est orthogonal à l'équipotentielle. En substituant la définition (7.28) dans l'équation (7.30), on peut exprimer la force conservative \mathbf{F}_c comme l'opposé du gradient de l'énergie potentielle associée,

$$\mathbf{F}_c^{\text{ext}} = -\frac{dV}{d\mathbf{r}} = -\nabla V \quad (7.31)$$

On dit que la force dérive de l'énergie potentielle qui est appelé une intégrale du mouvement.



Gradients vertical et radial

7.1.5 Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur $V_g(\mathbf{r})$ est l'énergie potentielle associée au poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ d'un point matériel de masse m . C'est une force conservative. D'après la définition (7.4), l'énergie potentielle de pesanteur est le travail qu'il faut effectuer pour déplacer le point matériel d'une position de référence \mathbf{r}_0 à la position \mathbf{r} en s'opposant au poids,

$$V_g(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{r}' = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.32)$$

Etant donné que le champ gravitationnel \mathbf{g} est vertical, on choisit un axe vertical Oz avec une origine au niveau du sol. On prend comme référence de potentiel de pesanteur le plan horizontal qui passe par l'origine O , c'est-à-dire $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$. Le vecteur position \mathbf{r} , le vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}'$ et le champ gravitationnel \mathbf{g} le long de l'axe vertical s'écrivent respectivement,

$$\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}} \quad d\mathbf{r}' = dz'\hat{\mathbf{z}} \quad \mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}} \quad (7.33)$$

Compte tenu des expressions vectorielles (7.33), l'énergie potentielle (7.32) est mise sous la forme suivante,

$$V_g(z) = - \int_0^z m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}' = mg \int_0^z dz' = mgz \quad (7.34)$$

D'après l'expression (7.31), le poids \mathbf{P} du point matériel dérive de l'énergie potentielle de pesanteur,

$$\mathbf{P} = -\nabla V_g = -\frac{dV_g}{dz}\hat{\mathbf{z}} = -mg\hat{\mathbf{z}} = m\mathbf{g} \quad (7.35)$$

A titre d'exemple, on peut mentionner le yo-yo qui transforme de l'énergie potentielle de pesanteur en énergie cinétique et vice versa, en conservant l'énergie mécanique.

7.1.6 Energie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique $V_e(\mathbf{r})$ est l'énergie potentielle associée à la force élastique $\mathbf{F}_e = -k\mathbf{d}$ exercée sur un point matériel par un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 . C'est une force conservative. D'après la définition (7.4), l'énergie potentielle élastique est le travail qu'il faut effectuer pour déplacer le point matériel d'une position de référence \mathbf{r}_0 à la position \mathbf{r} en s'opposant à la force élastique,

$$V_e(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r}' = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} k\mathbf{d} \cdot d\mathbf{r}' \quad (7.36)$$

On choisit un axe horizontal Ox le long du ressort avec une origine O au niveau du point de suspension du ressort au mur. On prend comme référence de potentiel élastique le plan vertical qui passe par l'autre extrémité du ressort au repos, c'est-à-dire $\mathbf{r}_0 = \ell_0\hat{\mathbf{x}}$. Le vecteur déformation \mathbf{d} et le vecteur déplacement infinitésimal $d\mathbf{r}'$ le long de l'axe horizontal s'écrivent respectivement,

$$\mathbf{d} = (x' - \ell_0)\hat{\mathbf{x}} \quad d\mathbf{r}' = dx'\hat{\mathbf{x}} \quad (7.37)$$

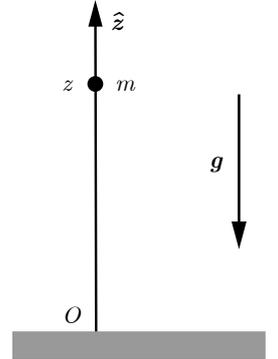
Compte tenu des expressions vectorielles (7.37), l'énergie potentielle (7.36) est mise sous la forme suivante,

$$V_e(x) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} k\mathbf{d} \cdot d\mathbf{r}' = k \int_{\ell_0}^x (x' - \ell_0) dx' = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 \quad (7.38)$$

D'après l'expression (7.31), la force élastique \mathbf{F}_e exercée sur le point matériel dérive de l'énergie potentielle élastique,

$$\mathbf{F}_e = -\nabla V_e = -\frac{dV_e}{dx}\hat{\mathbf{x}} = -k(x - \ell_0)\hat{\mathbf{x}} = -k\mathbf{d} \quad (7.39)$$

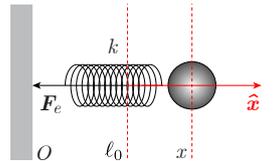
A titre d'exemple, on peut mentionner le pendule de Wilberforce qui transforme de l'énergie potentielle élastique de translation en énergie potentielle élastique de rotation et en énergie cinétique.



Energie potentielle de pesanteur



Yo-yo



Energie potentielle élastique



Pendule de Wilberforce

7.2 Equilibre et stabilité

Dans cette section, on va montrer qu'on peut déterminer analytiquement l'expression des positions d'équilibre en dérivant l'expression de l'énergie potentielle totale. On étudiera aussi leur stabilité.

7.2.1 Position d'équilibre et stabilité

On considère le mouvement d'un point matériel avec un seul degré de liberté en absence de force dissipative. Ainsi, s'il n'y a pas de mouvement de translation ou de rotation entretenu par une source d'énergie externe, c'est-à-dire un moteur, l'énergie mécanique E est conservée. A l'équilibre, l'énergie cinétique (6.57) est nulle. Compte tenu de la définition de l'énergie mécanique (7.9),

$$T = 0 \quad \text{ainsi} \quad E = V = \text{cste} \quad (\text{équilibre}) \quad (7.40)$$

La dynamique du point matériel est caractérisée par une seule variable qui correspond à un *degré de liberté*. Cette variable appelée *coordonnée généralisée* et notée q peut être soit une position soit un angle,

$$q \in \{x, y, z, r, \rho, \theta, \phi\} \quad \text{ainsi} \quad V \equiv V(q) \quad (7.41)$$

A l'équilibre, en $q = q_0$, la condition (7.40) sur l'énergie potentielle $V(q)$ associée à la force conservative \mathbf{F}_c s'écrit,

$$V(q_0) = \text{cste} \quad \text{ainsi} \quad \left. \frac{dV}{dq} \right|_{q=q_0} = 0 \quad (\text{équilibre}) \quad (7.42)$$

ce qui signifie que l'état d'équilibre correspond à un extrémum de l'énergie potentielle. Pour étudier la stabilité de la position d'équilibre q_0 , il faut considérer la dynamique du point matériel au voisinage de la position d'équilibre. Le développement limité au 2^e ordre de l'énergie potentielle $V(q)$ autour de la position d'équilibre q_0 s'écrit,

$$V(q) = V(q_0) + \left. \frac{dV}{dq} \right|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \mathcal{O}(q^3) \quad (7.43)$$

Compte tenu de la condition (7.42), le développement limité (7.43) au voisinage de l'équilibre se réduit à,

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \mathcal{O}(q^3) \quad (7.44)$$

Compte tenu des expressions (7.30) et (7.31), si la coordonnée généralisée est une coordonnée de position, la force conservative \mathbf{F}_c est donnée par,

$$\mathbf{F}_c = -\nabla V = -\frac{dV}{dq} \hat{\mathbf{q}} \quad (7.45)$$

où $\hat{\mathbf{q}}$ est le vecteur unité tangent à la ligne de coordonnée q . La position d'équilibre q_0

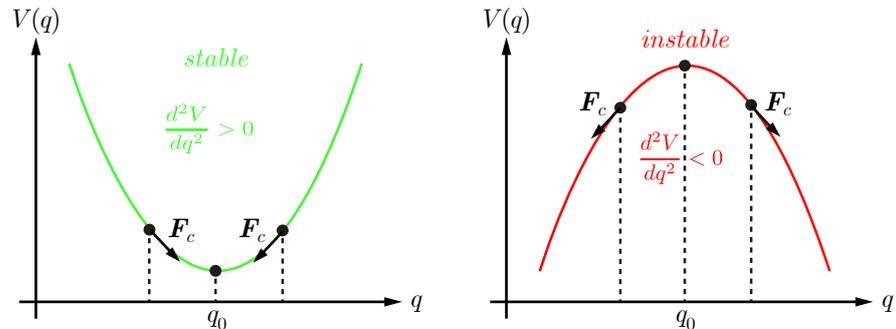


FIGURE 7.1 La position d'équilibre q_0 est stable si $d^2V/dq^2|_{q=q_0} > 0$ et instable si $d^2V/dq^2|_{q=q_0} < 0$

est stable si le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle est positif car la force

conservative \mathbf{F}_c ramène le point matériel vers la position d'équilibre dans son voisinage. La position d'équilibre q_0 est instable si le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle est négatif car la force conservative \mathbf{F}_c éloigne le point matériel de la position d'équilibre dans son voisinage (Fig. 7.1).

7.2.2 Stabilité du pendule mathématique

A titre d'exemple, on va déterminer la stabilité des positions d'équilibre d'un pendule mathématique constitué d'un point matériel de masse m suspendu à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ oscillant dans un plan vertical. Le degré de liberté est l'angle d'inclinaison du fil du pendule $q = \phi$. On prend comme référence de potentiel la surface horizontale passant par le point matériel lorsque le fil est vertical et que le point matériel se trouve à sa position la plus basse. La coordonnée verticale s'écrit alors

$$z(\phi) = \ell(1 - \cos \phi) \quad \text{où} \quad q = \phi \quad (7.46)$$

Compte tenu de la définition (7.34), l'énergie potentielle de pesanteur est donnée par,

$$V_g(\phi) = mgz(\phi) = mg\ell(1 - \cos \phi) \quad (7.47)$$

D'après la condition (7.42), à l'équilibre le pendule satisfait la condition,

$$\left. \frac{dV_g}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_0} = mg\ell \sin \phi_0 = 0 \quad \text{ainsi} \quad \phi_0 \in \{0, \pi\} \quad (7.48)$$

Pour déterminer la stabilité des positions d'équilibre $\phi_0 = 0$ et $\phi_0 = \pi$, on calcule la dérivée seconde de l'énergie potentielle de pesanteur $V_g(\phi)$,

$$\left. \frac{d^2V_g}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0} = mg\ell \cos \phi_0 \quad (7.49)$$

On en conclut que la position d'équilibre inférieure $\phi_0 = 0$ est stable car,

$$\left. \frac{d^2V_g}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0=0} = mg\ell > 0 \quad (\text{position stable}) \quad (7.50)$$

et que la position d'équilibre supérieure $\theta_0 = \pi$ est instable car,

$$\left. \frac{d^2V_g}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_0=\pi} = -mg\ell < 0 \quad (\text{position instable}) \quad (7.51)$$

7.3 Résonance

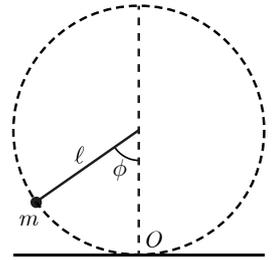
La **résonance** d'un système physique soumis à une force périodique externe donne lieu à une amplification de son amplitude d'oscillation pour une fréquence bien précise appelée la **fréquence de résonance** et pour des multiples de cette fréquence appelés des **harmoniques**. Cette résonance peut être de nature acoustique ou mécanique, dans le cas du tube d'air d'un trombone ou de la vibration de tiges (Fig. 7.2). Elle peut aussi être de nature électrique ou magnétique, dans le cas d'un circuit RLC ou de l'imagerie par résonance magnétique.

7.3.1 Oscillateur harmonique forcé

Pour étudier ce phénomène de résonance très courant en physique, on va considérer le modèle mécanique le plus simple, à savoir un **oscillateur harmonique forcé** amorti par des frottements visqueux et excité par une force extérieure périodique. Dans ce modèle, un point matériel de masse m est suspendu à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide l_0 . Le ressort est attaché à un vibreur qui exerce sur lui une force périodique de fréquence modulable.

Les forces extérieures exercées sur le point matériel sont son poids,

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = mg\hat{\mathbf{X}} \quad (7.52)$$



Pendule mathématique



Imagerie par résonance magnétique

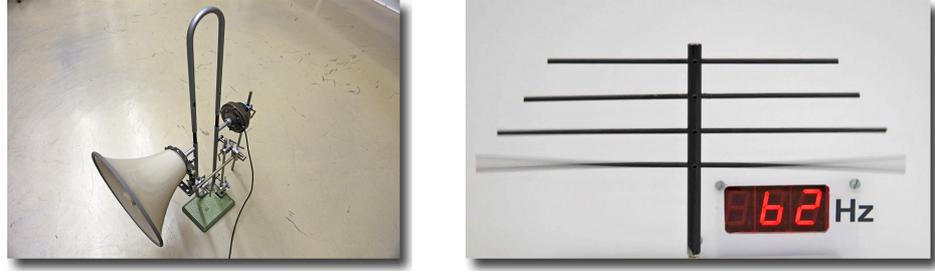


FIGURE 7.2 Trombone de Koenig : à certaines fréquences acoustiques précises, le son est amplifié; le système acoustique résonne. Tiges : A certaines fréquences de vibrations mécaniques précises, l'amplitude des vibrations augmente; les tiges d'une longueur spécifique résonnent.

où $\hat{\mathbf{X}}$ est le vecteur unitaire orienté vers le bas, la force élastique,

$$\mathbf{F}_e = -k \mathbf{d} = -k(X - \ell_0) \hat{\mathbf{X}} \quad (7.53)$$

la force de frottement visqueux,

$$\mathbf{F}_f = -b \mathbf{v} = -b \dot{X} \hat{\mathbf{X}} \quad (7.54)$$

et la force d'entraînement périodique,

$$\mathbf{F}(t) = F_0 \sin(\omega t) \hat{\mathbf{X}} \quad (7.55)$$

La loi vectorielle du mouvement harmonique oscillatoire forcé du point matériel s'écrit,

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}(t) = m \mathbf{a} \quad (7.56)$$

L'accélération du point matériel est,

$$\mathbf{a} = \ddot{X} \hat{\mathbf{X}} \quad (7.57)$$

Compte tenu des forces extérieures (7.52), (7.53), (7.54) et (7.55), ainsi que de l'accélération (7.57), la projection de la loi du mouvement harmonique oscillatoire forcé selon l'axe vertical OX orienté vers le bas s'écrit,

$$\text{selon } \hat{\mathbf{X}} : mg - b\dot{X} - k(X - \ell_0) + F_0 \sin(\omega t) = m\ddot{X} \quad (7.58)$$

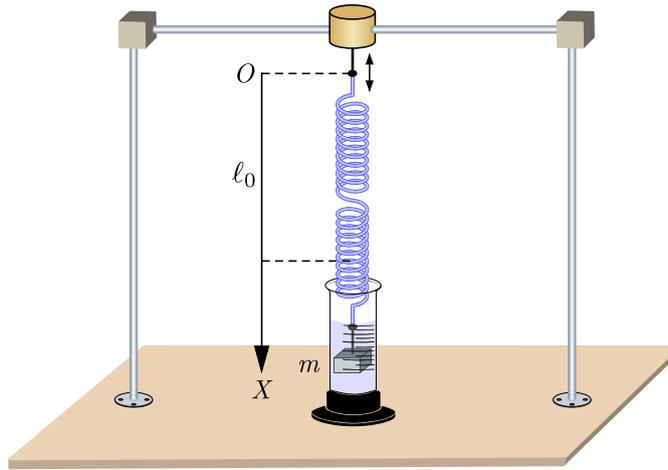


FIGURE 7.3 Oscillateur harmonique forcé constitué d'un point matériel de masse m suspendu à un ressort de constante élastique k , de longueur à vide ℓ_0 attaché à un vibreur.



Johann Samuel
Koenig

A l'aide du changement de variable suivant,

$$x = X - \ell_0 - \frac{mg}{k} \quad \text{ainsi} \quad \dot{x} = \dot{X} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \ddot{X} \quad (7.59)$$

l'équation du mouvement (7.58) peut être mise sous la forme suivante,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (7.60)$$

En utilisant l'expression (3.22) du temps d'amortissement τ et l'expression (4.40) de la pulsation ω_0 en absence d'amortissement et d'entraînement, et en introduisant l'intensité de l'accélération d'entraînement a_0 exprimée comme,

$$a_0 = \frac{F_0}{m} \quad (7.61)$$

l'équation du mouvement de l'oscillateur forcé (7.60) divisée par la masse m peut être mise sous la forme suivante,

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\omega t) \quad (7.62)$$

7.3.2 Régimes transitoire et stationnaire

On peut imposer comme condition initiale au mouvement harmonique oscillatoire forcé décrit par l'équation du mouvement (7.62) d'avoir une coordonnée de position nulle,

$$x(0) = 0 \quad (7.63)$$

La vitesse initiale est alors entièrement déterminée par l'amplitude du mouvement. La solution générale de l'équation différentielle (7.62) correspond à une combinaison linéaire de deux types de mouvements. Premièrement, en absence d'excitation mécanique générée par le vibreur, l'intensité a_0 de l'accélération d'entraînement est nulle, c'est-à-dire $a_0 = 0$, et l'équation du mouvement (7.62) est alors celle d'un oscillateur harmonique amorti par les frottement visqueux du fluide environnant – généralement de l'air ou de l'eau. Deuxièmement, lorsque le mouvement propre de l'oscillateur harmonique est entièrement amorti par le frottement visqueux, le mouvement l'oscillateur harmonique est complètement déterminé par la force d'excitation $F(t)$, c'est-à-dire qu'il acquiert la même pulsation ω que la force d'excitation. La solution mathématique de l'équation du mouvement (7.62) $x(t)$ est donc la somme de la solution de l'équation homogène $x_h(t)$, définie par $a_0 = 0$, et d'une solution particulière $x_p(t)$ vers laquelle tend le système à suffisamment grand temps,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (7.64)$$

Au chapitre 4, on a établi que pour un oscillateur harmonique amorti, l'amplitude d'oscillation $\rho e^{-t/2\tau}$ décroît exponentiellement au cours du temps,

$$x_h(t) = \rho e^{-t/2\tau} \sin(\omega' t + \varphi') \quad (7.65)$$

où ω' est la pulsation et φ' est l'angle de déphasage du mouvement oscillatoire harmonique amorti. La solution particulière $x_p(t)$ de pulsation ω indépendante de ω' est donnée par,

$$x_p(t) = \rho \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.66)$$

où φ est l'angle de déphasage. Compte tenu de la solution du système homogène (7.65) et de la solution particulière (7.66), la solution générale (7.64) devient (Fig. 7.4),

$$x(t) = \rho \left(e^{-t/2\tau} \sin(\omega' t - \varphi) + \sin(\omega t + \varphi) \right) \quad (7.67)$$

où les angles de déphasage sont opposés, c'est-à-dire $\varphi' = -\varphi$, afin de satisfaire la condition initiale (7.63). L'angle de déphasage φ est déterminé par la condition initiale imposée sur la vitesse.

En présence d'une force d'excitation périodique, il existe ainsi deux régimes que l'on peut distinguer qualitativement et quantitativement. Lorsqu'on enclenche le vibreur au temps initial, c'est-à-dire $t = 0$, jusqu'à un temps qui est de l'ordre de grandeur du temps d'amortissement, c'est-à-dire $t \sim \tau$, il y a coexistence des oscillations propres du système et des oscillations dues à la force d'excitation. Il s'agit du *régime transitoire* caractérisé qualitativement par l'interférence entre des oscillations de pulsations différentes qui ont des amplitudes du même ordre de grandeur et génèrent de ce fait des *battements*. Pour un

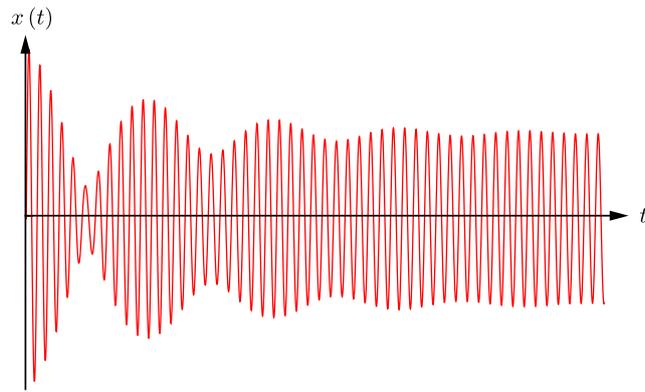


FIGURE 7.4 Durant le régime transitoire, l'amplitude d'oscillation propre est exponentiellement amortie pour tendre vers une constante durant le régime stationnaire.

temps qui est beaucoup plus grand que le temps d'amortissement, c'est-à-dire $t \gg \tau$, l'amplitude des oscillations propres du système devient négligeable par rapport à l'amplitude des oscillations générées par la force d'excitation périodique. Le mouvement de l'oscillateur harmonique est alors entièrement déterminé par la force d'excitation périodique. Il s'agit du **régime stationnaire**. La réponse du système à la force d'excitation en régime stationnaire s'appelle la **réponse harmonique**.

Dans le cas particulier où les frottements sont négligeables, le temps d'amortissement diverge, c'est-à-dire $\tau \rightarrow \infty$, et l'angle de déphasage est négligeable, c'est-à-dire $\varphi \rightarrow 0$. Ainsi, l'équation horaire (7.67) se réduit à,

$$x(t) = \rho \left(\sin(\omega' t) + \sin(\omega t) \right) \quad (7.68)$$

Compte tenu de l'identité trigonométrique,

$$\sin(\omega' t) + \sin(\omega t) = 2 \sin\left(\frac{\omega t + \omega' t}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - \omega' t}{2}\right) \quad (7.69)$$

l'équation horaire du mouvement (7.68) peut être mise sous la forme suivante,

$$x(t) = 2\rho \sin\left(\frac{(\omega + \omega') t}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega - \omega') t}{2}\right) \quad (7.70)$$

Elle décrit un mouvement oscillatoire rapide de pulsation $\omega + \omega'$ à l'intérieur d'une enveloppe oscillatoire de pulsation lente $\omega - \omega'$. Il s'agit de battements de pulsation $\omega + \omega'$ (Fig. 7.5). On peut entendre ces battements en faisant interférer les ondes sonores provenant de deux

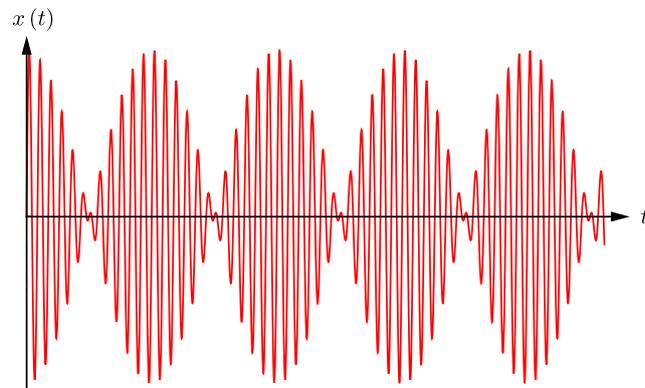


FIGURE 7.5 Les battements de pulsation lente $\omega - \omega'$ sont représentés par l'enveloppe oscillante due à l'interférence entre le mouvement harmonique oscillatoire propre et l'excitation périodique.

diapasons avec des fréquences voisines (Fig. 7.6).

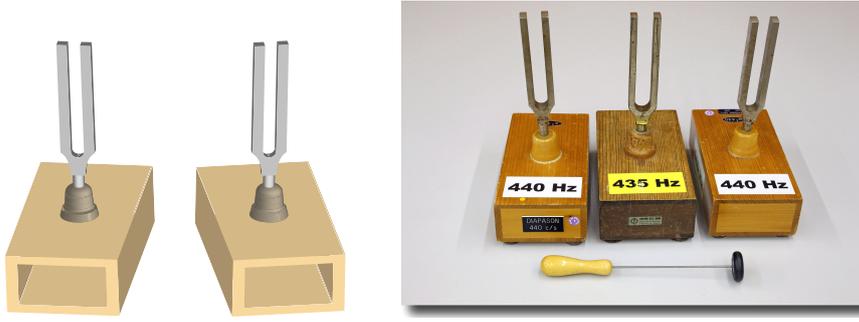


FIGURE 7.6 La fréquence des battements $f - f'$ est la différence des fréquences d'oscillations voisines $f = 440$ Hz et $f' = 435$ Hz des deux diapasons.

7.3.3 Réponse harmonique

En régime stationnaire, la solution de l'équation du mouvement (7.62) est la solution particulière (7.66),

$$x(t) = \rho \sin(\omega t + \varphi) \quad (7.71)$$

pour des conditions initiales quelconques. Pour déterminer l'expression de l'amplitude ρ et de l'angle de déphasage φ de la réponse harmonique, on introduit une solution stationnaire de l'équation du mouvement (7.62) déphasée d'un angle $\pi/2$ par rapport à $x(t)$, ce qui signifie qu'on effectue la transformation $\omega t \rightarrow \omega t + \pi/2$ dans l'expression (7.71) de $x(t)$ pour obtenir,

$$y(t) = \rho \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.72)$$

L'équation du mouvement (7.62) s'écrit en terme de la variable y et de ses dérivées temporelles comme,

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau} \dot{y} + \omega_0^2 y = a_0 \cos(\omega t) \quad (7.73)$$

La fonction $z(t)$ définie dont la partie réelle est la solution stationnaire $y(t)$ et la partie imaginaire est la solution stationnaire $x(t)$,

$$z(t) = y(t) + ix(t) \quad \text{ainsi} \quad \dot{z} = \dot{y} + i\dot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{z} = \ddot{y} + i\ddot{x} \quad (7.74)$$

est une solution complexe de l'équation du mouvement (7.62) en régime stationnaire. En prenant la somme de l'équation (7.62) et de l'équation (7.73) multipliée par i et en exprimant cette somme en terme de la fonction z et de ses dérivées temporelles \dot{z} et \ddot{z} , compte tenu de la formule d'Euler (4.11), on obtient,

$$\ddot{z} + \frac{1}{\tau} \dot{z} + \omega_0^2 z = a_0 e^{i\omega t} \quad (7.75)$$

Compte tenu de la formule d'Euler,

$$\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) = e^{i(\omega t + \varphi)} = e^{i\omega t} e^{i\varphi} \quad (7.76)$$

la solution mathématique complexe (7.74) devient,

$$z(t) = \rho (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) = \rho e^{i(\omega t + \varphi)} = \rho e^{i\omega t} e^{i\varphi} \quad (7.77)$$

Elle peut être mise sous la forme suivante,

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} \quad \text{où} \quad z_0 = \rho e^{i\varphi} \quad (7.78)$$

En substituant la solution stationnaire (7.78) dans l'équation du mouvement (7.75), on obtient la condition suivante,

$$\left(-\omega^2 + i \frac{\omega}{\tau} + \omega_0^2\right) z_0 e^{i\omega t} = a_0 e^{i\omega t} \quad (7.79)$$

En divisant cette condition par le nombre complexe de module unité $e^{i\omega t}$, l'amplitude complexe z_0 s'écrit,

$$z_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega}{\tau}} = a_0 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (7.80)$$

D'après la définition (7.78), l'amplitude réelle ρ est donnée par le module de z_0 ,

$$\rho = |z_0| = a_0 \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} \quad (7.81)$$

et la tangente de l'angle de déphasage φ est donné par le rapport des parties imaginaire et réelle de z_0 ,

$$\tan \varphi = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho \cos \varphi} = \frac{\text{Im}(\rho e^{i\varphi})}{\text{Re}(\rho e^{i\varphi})} = \frac{\text{Im}(z_0)}{\text{Re}(z_0)} = -\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.82)$$

Compte tenu de l'amplitude réelle (7.81), le rapport de l'amplitude réelle d'oscillation $\rho(\omega)$ en présence d'une force d'entraînement de pulsation ω et de l'amplitude réelle d'oscillation $\rho(0)$ en absence de force d'entraînement est une fonction lorentzienne (Fig 7.7),

$$\frac{\rho(\omega)}{\rho(0)} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}} \quad (7.83)$$

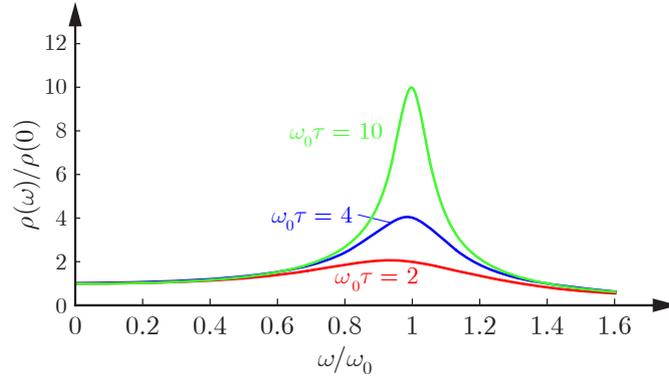


FIGURE 7.7 Fonction lorentzienne du rapport des amplitudes d'oscillation $\rho(\omega)$ et $\rho(0)$ en fonction du rapport de la fréquence d'excitation ω et de la fréquence de résonance ω_0 .

Par définition, le rapport des amplitudes réelles (7.83) est maximal à la résonance. Pour déterminer la pulsation ω_r à la résonance, on calcule la dérivée du rapport des amplitudes (7.82) par rapport à la variable sans dimension ω/ω_0 et on impose que cette dérivée s'annule en $\omega = \omega_r$,

$$\frac{d}{d(\omega/\omega_0)} \left(\frac{\rho(\omega)}{\rho(0)} \right) \Big|_{\omega=\omega_r} = \frac{2 \frac{\omega_r}{\omega_0} \left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right) - \frac{\omega_r}{\omega_0} \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}{\left(\left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \frac{1}{(\omega_0\tau)^2} \right)^{3/2}} = 0 \quad (7.84)$$

Comme le dénominateur (7.84) de la dérivée du rapport des amplitudes est non-nul, le numérateur doit s'annuler ce qui donne la condition suivante,

$$2 \frac{\omega_r}{\omega_0} \left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right) - \frac{\omega_r}{\omega_0} \frac{1}{(\omega_0\tau)^2} = 0 \quad (7.85)$$

En multipliant cette condition par $-\omega_0^3/\omega_r$, on obtient,

$$2(\omega_r^2 - \omega_0^2) + \frac{1}{\tau^2} = 0 \quad (7.86)$$

Ainsi, la pulsation à la résonance – aussi appelée à tort la fréquence de résonance – est,

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2}} \quad (\text{pulsation de résonance}) \quad (7.87)$$

La pulsation de résonance ω_r est légèrement inférieure à la pulsation ω_0 . Pour un amortissement faible caractérisé par la condition $\omega_0\tau \gg 1$, on peut faire un développement limité au quatrième ordre en $1/\omega_0\tau$ de la pulsation de résonance,

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2(\omega_0\tau)^2}} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4(\omega_0\tau)^2} - \frac{1}{32(\omega_0\tau)^4} \right) \quad (7.88)$$

Pour un amortissement suffisamment faible, la pulsation de résonance ω_r se réduit à,

$$\omega_r \simeq \omega_0 \quad (\text{amortissement faible}) \quad (7.89)$$

Compte tenu du temps d'amortissement (3.22) et de la loi de Stokes (3.3), la fonction lorentzienne du rapport des amplitudes à la résonance (7.89) se réduit à,

$$\frac{\rho(\omega_r)}{\rho(0)} \simeq \frac{\rho(\omega_0)}{\rho(0)} = \omega_0\tau = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{m\omega_0}{k\eta} \quad (7.90)$$

Par conséquent, plus la viscosité du milieu est faible plus l'amplitude à la fréquence de résonance sera grande pour une excitation donnée. Par exemple, l'amplitude à la résonance sera plus grande dans l'air que dans l'eau, ce qui paraît assez intuitif.

En inversant l'équation (7.82), on obtient l'angle de déphasage,

$$\varphi(\omega) = \arctan \left(-\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = -\arctan \left(\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \left(\frac{1}{\omega_0\tau}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) \quad (7.91)$$

Ainsi, dans la limite où la pulsation d'oscillation ω tend inférieurement ou supérieurement vers la pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0$ en régime d'amortissement faible, l'angle de déphasage entre l'excitation et la réponse harmonique correspond à plus ou moins un quart de période (Fig 7.8),

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{déphasage à la résonance}) \quad (7.92)$$

Le plus célèbre exemple historique de résonance est probablement celui de la destruction du pont de Tacoma en 1940 due au vent (Fig. 7.9). Le pont de Tacoma s'est effondré quand un fort vent a généré une résonance dont l'amplitude est devenue si grande que la structure du pont n'a plus pu résister.

Un deuxième exemple de résonance mécanique est celui de l'oscillation de pendules disposés sur un fil. En faisant osciller le premier pendule, les autres pendules se mettent aussi à osciller (régime transitoire). Après un certain temps, seulement le premier et le quatrième continuent à osciller et les autres deviennent immobiles, c'est le régime transitoire. En effet, le premier pendule (rouge) a la même longueur que le quatrième et donc la même pulsation parce que la pulsation $\omega = \sqrt{g/\ell}$ d'un pendule dépend de sa longueur (Fig. 7.10).

Un troisième exemple est de la synchronisation de métronomes posés sur une seule plaque en bois. Lorsque la plaque est posée sur des cylindres et qu'elle est ainsi libre d'osciller latéralement, les métronomes se synchronisent par résonance à travers la plaque. Lorsque la plaque n'est plus libre d'osciller, les métronomes se désynchronisent (Fig. 7.11).

Un quatrième exemple est celui de la destruction d'un verre par résonance acoustique à l'aide d'ultrasons générés par un haut-parleur (Fig. 1.1).



Destruction d'une verre par résonance

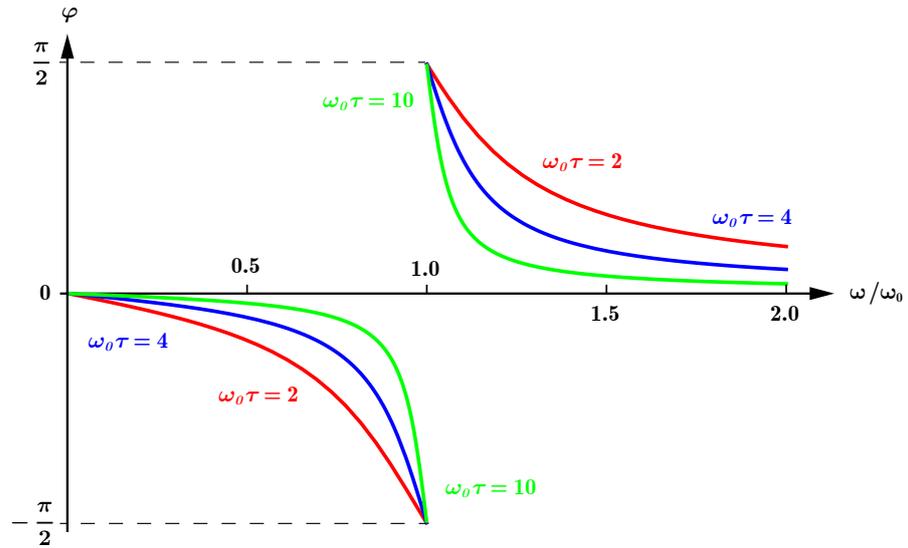


FIGURE 7.8 Angle de déphasage $\varphi(\omega)$ en fonction du rapport de la fréquence d'excitation ω et de la fréquence de résonance $\omega_r = \omega_0$ en régime d'amortissement faible.



FIGURE 7.9 Le pont de Tacoma peu avant sa rupture. Un modèle de résonance mécanique responsable de la destruction du pont.

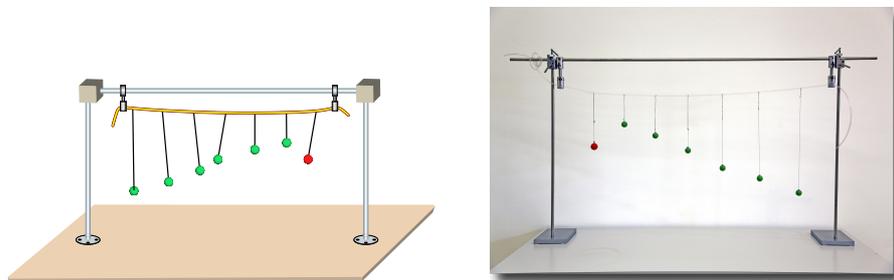


FIGURE 7.10 En faisant osciller le premier pendule, les autres pendules se mettent aussi à osciller (régime transitoire). Après un certain temps, seulement le premier et le quatrième continuent à osciller et les autres deviennent immobiles (régime stationnaire). En effet, le premier pendule (rouge) a la même longueur que le quatrième et donc la même pulsation parce que la pulsation $\omega = \sqrt{g/l}$ d'un pendule dépend de sa longueur.



FIGURE 7.11 Six métronomes de même fréquence d'oscillation oscillent sur une même plaque de bois. Lorsque la plaque peut rouler sur deux cylindres en Plexiglas, les métronomes se synchronisent, sinon ils se désynchronisent.